अध्याय 9

# अवकल समीकरण

## 9.1 समग्र अवलोकन (Overview)

(i) एक ऐसा समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर (चरों) के सापेक्ष आश्रित चर के अवकलज सम्मिलित हों, अवकल समीकरण कहलाता है।

(ii) एक अवकल समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर के केवल एक चर के आश्रित अवकलज सम्मिलित हों एक साधारण अवकल समीकरण (ordinary differential equation) कहलाता है। एक अवकल समीकरण जिसमें स्वतंत्र चर के एक से अधिक चरों के अवकलज सम्मिलित हों एक आंशिक अवकल समीकरण (Partial differential equation) कहलाता है।

(iii) किसी अवकल समीकरण में सम्मिलित उच्चतम अवकलज की कोटि उस अवकल समीकरण की कोटि (order) कहलाती है।

(iv) यदि कोई अवकल समीकरण अवकलजों में बहुपद समीकरण है तो उस अवकल समीकरण की घात परिभाषित होती है।

(v) किसी अवकल समीकरण की घात (यदि परिभाषित हो) उस अवकल समीकरण में सम्मिलित उच्चतम कोटि अवकलज की उच्चतम घात (केवल धनात्मक पूर्णांक) होती है।

(vi) एक दिए हुए अवकल समीकरण को संतुष्ट करने वाला फलन उस अवकल समीकरण का हल कहलाता है। एक ऐसा हल जिसमें उतने ही स्वेच्छ अचर हों जितनी उस अवकल समीकरण की कोटि है, व्यापक हल कहलाता है। स्वेच्छ अचरों से मुक्त हल विशिष्ट हल कहलाता है।

(vii) किसी दिए हुए फलन से अवकल समीकरण बनाने के लिए हम उस फलन का उत्तरोत्तर उतनी ही बार अवकलन करते हैं जितने उस फलन में स्वेच्छ अचर होते हैं और तब स्वेच्छ अचरों को विलुप्त करते हैं।

(viii) किसी वक्र कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण की कोटि उतनी ही होती है जितने उस वक्र कुल के संगत समीकरण में स्वेच्छ अचर होते हैं।

(ix) चर पृथक्करणीय विधि ऐसे समीकरण को हल करने के लिए उपयोग की जाती है जिसमें चरों को पूरी तरह से पृथक किया जा सकता है अर्थात् $x$ वाले पद $dx$ के साथ रहने चाहिए और $y$ वाले पद $dy$ के साथ रहने चाहिए।

(x) फलन $F(x, y)$, $n$ घात वाला समघातीय फलन कहलाता है यदि किसी शून्येतर अचर $\lambda$ के लिए $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ हो।

(xi) एक अवकल समीकरण जिसे $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ या $\frac{dx}{dy} = G(x, y)$, जहाँ $F(x, y)$ और $G(x, y)$ शून्य घात वाले समघातीय फलन है के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है, समघातीय अवकल समीकरण कहलाता है।

(xii) $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ प्रकार के समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए हम $y = vx$ प्रतिस्थापित करते हैं और $\frac{dx}{dy} = G(x, y)$ प्रकार के समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए $x = vy$ प्रतिस्थापित करते हैं।

(xiii) $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप वाला अवकल समीकरण जिसमें P तथा Q अचर अथवा केवल $x$ के फलन है, प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरण कहलाता है। इस प्रकार के अवकल समीकरण का हल $y$ समाकलन गुणांक (I.F.) $= \int (Q \times \text{I.F.})\, dx + C$, जहाँ I.F. (Integrating Factor) $= e^{\int P dx}$ है समाकलन गुणांक दिया जाता है।

(xiv) प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरण का दूसरा रूप $\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ है जहाँ $P_1$ और $Q_1$ अचर अथवा केवल $y$ के फलन हैं। इस प्रकार के अवकल समीकरण का हल $x\,(\text{I.F.}) = \int (Q_1 \times \text{I.F.})\, dy + C$, जहाँ I.F. $= e^{\int P_1 dy}$ है, द्वारा दिया जाता है।

## 9.2 हल किए हुए उदाहरण

### लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

**उदाहरण 1** वक्रों के कुल $y = Ae^{2x} + B.e^{-2x}$ के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

**हल** $y = Ae^{2x} + B.e^{-2x}$

$$\frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} - 2\,B.e^{-2x} \quad \text{तथा} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x} + 4Be^{-2x}$$

इस प्रकार $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$ अर्थात्, $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0.$

**उदाहरण 2** अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

**हल** $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ $\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ $\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \log y = \log x + \log c \Rightarrow y = cx$

**उदाहरण 3** अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = ye^x$, $x = 0, y = e$ में $y$ का मान बताएं जब $x = 1$

**हल** $\frac{dy}{dx} = ye^x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int e^x dx \Rightarrow \log y = e^x + c$

$x = 0$ और $y = e$, रखने पर हमें $\log e = e^0 + c$ अर्थात् $c = 0$ ($\because \log e = 1$)

प्राप्त होता है। इसलिए $\log y = e^x$

अब इसमें $x = 1$ रखने पर हमें $\log y = e$ अर्थात् $y = e^e$ प्राप्त होता है।

**उदाहरण 4** अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$ को हल कीजिए।

**हल** $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ रैखिक अवकल समीकरण है।

यहाँ I.F. $= e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x$ इसलिए, दिए गए अवकल समीकरण का हल है

$y.x = \int x\, x^2\, dx$, अर्थात् $yx = \frac{x^4}{4} + c$

अत: $y = \frac{x^3}{4} + \frac{c}{x}$

**उदाहरण 5** मूल बिंदु से गुजरने वाली सरल रेखाओं के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

**हल** मान लीजिए मूल बिंदु से गुजरने वाली सरल रेखाओं के कुल का समीकरण $y = mx$ है।

इसलिए $\frac{dy}{dx} = m$

$m$ को विलुप्त करने पर हमें $y = \frac{dy}{dx} . x$ या $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ प्राप्त होता है।

**उदाहरण 6** एक तल में सभी अक्षैतिज रेखाओं का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

**हल** तल में सभी अक्षैतिज रेखाओं का व्यापक समीकरण $ax + by = c$, है जहाँ $a \neq 0$ है।

इसलिए, $a\frac{dx}{dy} + b = 0$

पुनः दोनों पक्षों का $y$ के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें

$a\frac{d^2x}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dy^2} = 0$ प्राप्त होता है

**उदाहरण 7** उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल बिंदु के अतिरिक्त किसी अन्य बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $y + \frac{y}{x}$ है।

**हल** दिया है $\frac{dy}{dx} = y + \frac{y}{x} = y \quad 1 + \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \quad 1 + \frac{1}{x} \quad dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\log y = x + \log x + c \Rightarrow \log \quad \frac{y}{x} \quad = x + c$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = e^{x+c} = e^x . e^c \Rightarrow \frac{y}{x} = k \; e^x$$

$$\Rightarrow y = kx . e^x$$

## दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

**उदाहरण 8** बिंदु (1, 1) से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका किसी बिंदु P($x$, $y$) से वक्र के अभिलंब की मूल बिंदु से लंबवत दूरी P से $x$ –अक्ष की दूरी के बराबर है।

**हल** माना P($x$, $y$) से अभिलंब का समीकरण $\text{Y} - y = \frac{-dx}{dy}(\text{X} - x)$ अर्थात्

$$\text{Y} + \text{X}\frac{dx}{dy} - \quad y + x\frac{dx}{dy} \quad = 0 \qquad ...(1)$$

इसलिए मूल बिंदु से (1) की लंबवत् दूरी

$$\frac{y + x\frac{dx}{dy}}{\sqrt{1 + \quad \frac{dx}{dy} \quad ^2}} \qquad ...(2)$$

साथ ही P की $x$-अक्ष से दूरी $|y|$ है। अत:
$$\frac{y + x\frac{dx}{dy}}{\sqrt{1 + \quad \frac{dx}{dy} \quad ^2}} = |y|$$

$$\Rightarrow \left(y + x\frac{dx}{dy}\right)^2 = y^2 \quad 1 + \quad \frac{dx}{dy} \quad ^2 \quad \Rightarrow \frac{dx}{dy} \quad \frac{dx}{dy}\left(x^2 - y^2\right) + 2xy \quad = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 0$$

या
$$\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

**स्थिति I:** $\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow dx = 0$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें $x = k$ प्राप्त होता है। $x = 1$ रखने पर $k = 1$ प्राप्त होता है। इसलिए वक्र का समीकरण $x = 1$ है। (यह संभव नहीं है इसलिए इसको अस्वीकार करते हैं)

**स्थिति II:** $\frac{dx}{dy} = \frac{2xy}{y^2 - x^2}$  $\frac{dy}{dx}$ $\frac{y^2 - x^2}{2xy}$. अब $y = vx$, रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2x^2 - x^2}{2vx^2} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} - v = \frac{-(1+v^2)}{2v}$$

$$\Rightarrow \frac{2v}{1+v^2}dv = \frac{-dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$$\log(1 + v^2) = -\log x + \log c \quad \Rightarrow \log(1 + v^2)(x) = \log c \Rightarrow (1 + v^2)\, x = c$$

$\Rightarrow$ $x^2 + y^2 = cx$. अब $x = 1$ तथा $y = 1$ रखने पर $c = 2$ प्राप्त होता है।

इसलिए $x^2 + y^2 - 2x = 0$ वाँछित समीकरण है।

**उदाहरण 9** बिंदु $1, \frac{\pi}{4}$ से जाने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि किसी बिंदु P $(x, y)$ पर वक्र की स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{y}{x} - \cos^2\frac{y}{x}$ है।

**हल** दिए गए प्रतिबंध के आधार पर $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \cos^2\frac{y}{x}$ ... (i)

यह एक समघातीय अवकल समीकरण है। इसमें $y = vx$, रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - \cos^2 v \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\cos^2 v$$

$$\Rightarrow \quad \sec^2 v\, dv = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \tan v = -\log x + c$$

$$\Rightarrow \quad \tan\frac{y}{x} + \log x = c \qquad ...(ii)$$

$x = 1$ तथा $y = \dfrac{\pi}{4}$ रखने पर हमें $c = 1$ प्राप्त होता है। इस प्रकार

$$\tan \frac{y}{x} + \log x = 1 \text{ वाँछित समीकरण है।}$$

**उदाहरण 10** $x^2\dfrac{dy}{dx} - xy = 1 + \cos\left(\dfrac{y}{x}\right), x \neq 0$ तथा जब $x = 1$ तब $y = \dfrac{\pi}{2}$ है को हल कीजिए।

**हल** दिए गए समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$x^2\frac{dy}{dx} - xy = 2\cos^2\left(\frac{y}{2x}\right), x \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2\dfrac{dy}{dx} - xy}{2\cos^2 \dfrac{y}{2x}} = 1 \quad \Rightarrow \frac{\sec^2 \dfrac{y}{2x}}{2}\, x^2\frac{dy}{dx} - xy = 1$$

दोनों पक्षों को $x^3$ से विभाजित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{\sec^2\left(\dfrac{y}{2x}\right)}{2}\left[\frac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{x^2}\right] = \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\tan \frac{y}{2x} = \frac{1}{x^3}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$\tan \frac{y}{2x} = \frac{-1}{2x^2} + k$$

अब $x = 1$ तथा $y = \dfrac{\pi}{2}$ रखने पर

$k = \dfrac{3}{2}$ इसलिए, $\tan \dfrac{y}{2x} = -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{3}{2}$ वाँछित हल है।

**उदाहरण 11** बताइए कि समीकरण $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$ किस प्रकार का अवकल समीकरण है तथा इसे हल कीजिए।

**हल** दिए गए समीकरण $x\, dy = \left(\sqrt{x^2 + y^2} + y\right) dx$,

अर्थात्, $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x} \qquad \text{... (1)}$$

यह समीकरण एक समघातीय अवकल समीकरण है। समीकरण (1) में $y = vx$, रखने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 + v^2 x^2} + vx}{x} \qquad \text{अर्थात्} \quad v + x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2} + v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \frac{dx}{x} \qquad \text{... (2)}$$

(2) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर:

$$\log\left(v + \sqrt{1 + v^2}\right) = \log x + \log c \Rightarrow v + \sqrt{1 + v^2} = cx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = cx \qquad \Rightarrow \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$$

## वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

*उदाहरण 12 से 21 तक प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए-*

**उदाहरण 12** अवकल समीकरण $\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)^3 = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2$ की घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

**हल** सही उत्तर (B) है।

**उदाहरण 13** अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 \log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ की घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) परिभाषित नहीं है

**हल** सही उत्तर (D) है। दिया गया अवकल समीकरण अवकलजों में बहुपद समीकरण नहीं है। इसलिए इसकी घात परिभाषित नहीं है।

**उदाहरण 14** अवकल समीकरण $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2 = \frac{d^2y}{dx^2}$ के क्रमशः कोटि और घात हैं

(A) 1, 2 (B) 2, 2 (C) 2, 1 (D) 4, 2

**हल** सही उत्तर (C) है।

**उदाहरण 15** दी गई त्रिज्या $a$ के सभी वृत्तों के अवकल समीकरण की कोटि है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

**हल** सही उत्तर (B) है। माना दिए गए वृत्त कुल का समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ है। इसमें दो स्वेच्छ अचर $h$ और $k$ हैं। इसलिए दिए गए अवकल समीकरण की कोटि 2 होगी।

**उदाहरण 16** अवकल समीकरण $2x.\frac{dy}{dx} - y = 3$ का हल किस कुल को निरूपित करता है?

(A) सरल रेखाओं (B) वृत्तों (C) परवलयों (D) दीर्घ वृत्तों

**हल** सही उत्तर (C) है। दिए गए समीकरण को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{2dy}{y+3} = \frac{dx}{x} \Rightarrow 2\log(y+3) = \log x + \log c$$

$\Rightarrow$ $(y+3)^2 = cx$ सही है जो परवलयों के एक कुल को निरूपित करता है।

**उदाहरण 17** अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}(x \log x) + y = 2\log x$ का समाकलन गुणक है

(A) $e^x$ (B) $\log x$ (C) $\log(\log x)$ (D) $x$

**हल** सही उत्तर (B) है। दिए गए समीकरण को $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x\log x}=\frac{2}{x}$ के रूप में लिख सकते हैं।

इसलिए I.F. = $e^{\int\frac{1}{x\log x}dx}$ = $e^{\log\ (\log x)}$ = $\log x$.

**उदाहरण 18** अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}^{2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ का एक हल है

(A) $y = 2$ (B) $y = 2x$ (C) $y = 2x - 4$ (D) $y = 2x^2 - 4$

**हल** सही उत्तर (C) है।

**उदाहरण 19** निम्न में से कौन सा $x$ और $y$ में समघातीय फलन नहीं है।

(A) $x^2 + 2xy$ (B) $2x - y$ (C) $\cos^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ (D) $\sin x - \cos y$

**हल** सही उत्तर (D) है।

**उदाहरण 20** अवकल समीकरण $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$ का हल है

(A) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c$ (B) $\log x \,.\, \log y = c$ (C) $xy = c$ (D) $x + y = c$

**हल** सही उत्तर (C) है। दिए गए समीकरण से हमें $\log x + \log y = \log c$ प्राप्त होता है जिससे $xy = c$ मिलता है।

**उदाहरण 21** अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2$ का हल है

(A) $y=\frac{x^2+c}{4x^2}$ (B) $y=\frac{x^2}{4}+c$ (C) $y=\frac{x^4+c}{x^2}$ (D) $y=\frac{x^4+c}{4x^2}$

**हल** सही उत्तर (D) है। I.F. = $e^{\frac{2}{x}dx}=e^{2\log x}=e^{\log x^2}=x^2$. इसलिए इसका हल है

$y \,.\, x^2 = \int x^2 .x dx = \frac{x^4}{4}+k$, अर्थात् $y=\frac{x^4+c}{4x^2}$

**उदाहरण 22** निम्नलिखित में रिक्त स्थानों को भरिए–

(i) परवलयों $y^2 = 4ax$ के कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण की कोटि .................. है।

(ii) अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$ की घात .................. है।

(iii) अवकल समीकरण $\tan x\, dx + \tan y\, dy = 0$ के विशिष्ट हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या .................. है।

(iv) $F(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$ का घात ..................है।

(v) अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 \log \frac{x}{y} - x^2}{xy \log \frac{x}{y}}$ को हल करने के लिए उपयुक्त प्रतिस्थापन ................. है।

(vi) अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} - y = \sin x$ का समाकलन गणक (I.F.) ............... है।

(vii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$ का व्यापक हल ................... है।

(viii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$ का व्यापक हल ................... है।

(ix) वक्रों के कुल $y = A \sin x + B \cos x$ is को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण .......................है।

(x) जब $\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{dy} = 1\ (x \neq 0)$ को $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, के रूप में लिखते हैं तब P = ................ है।

**हल**

(i) एक; स्वेच्छ अचर केवल $a$ है।

(ii) दो; क्योंकि सबसे अधिक कोटि के अवकलज की घात दो है।

(iii) शून्य; किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में कोई भी स्वेच्छ अचर नहीं होता है।

(iv) शून्य

(v) $x = vy$

(vi) $\frac{1}{x}$; दिए गए अवकल समीकरण को $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$ रूप में लिख सकते हैं और इसलिए

$$\text{I.F.} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}.$$

(vii) $e^y = e^x + c$ दिए गए समीकरण से $e^y dy = e^x dx$ प्राप्त होता है।

(viii) $xy = \frac{x^2}{2} + c$ ; I.F. $= e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x$ तथा हल $y \,.\, x = \int x.1\, dx = \frac{x^2}{2} + C$ है।

(ix) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$; दिए गए फलन को $x$ के सापेक्ष उत्तरोत्तर अवकलन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{dy}{dx} = \text{A}\cos x - \text{B}\sin x \quad \text{और} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\text{A}\sin x - \text{B}\cos x$$

$\Rightarrow$ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ अवकल समीकरण है।

(x) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ; दिए गए समीकरण को

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}$ अर्थात् $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ प्रकार से लिख सकते हैं।

यह $\frac{dy}{dx} + \text{P}y = \text{Q}$ प्रकार का अवकल समीकरण है।

**उदाहरण 23** बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य हैं–

(i) दीर्घ वृत्तों जिनका केंद्र मूल बिंदु पर तथा नाभियाँ $x$-अक्ष पर हैं को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण की कोटि 2 है।

(ii) अवकल समीकरण $\sqrt{1 + \frac{d^2y}{dx^2}} = x + \frac{dy}{dx}$ की घात परिभाषित नहीं है।

(iii) $\frac{dy}{dx}+y=5$ एक $\frac{dy}{dx}+\text{P}y=\text{Q}$ प्रकार का अवकल समीकरण है परंतु इसे चर पृथक्करणीय विधि से भी हल कर सकते हैं।

(iv) $\text{F}(x, y) = \dfrac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$ समघातीय फलन नहीं है।

(v) $\text{F}(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ कोटि 1 का समघातीय फलन है।

(vi) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}-y=\cos x$ का समाकलन गुणक $e^x$ है।

(vii) अवकल समीकरण $x(1+y^2)dx+y(1+x^2)dy=0$ का व्यापक हल $(1+x^2)(1+y^2)=k$ है।

(viii) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y\sec x=\tan x$ का व्यापक हल $y(\sec x-\tan x)=\sec x-\tan x+x+k$ है।

(ix) अवकल समीकरण $y^2\frac{dy}{dx}+y^2+1=0$ का एक हल $x+y=\tan^{-1}y$ है।

(x) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-x^2\frac{dy}{dx}+xy=x$ का एक विशिष्ट हल $y=x$ है।

**हल**

(i) सत्य; क्योंकि दिए गए कुल को निरूपित करने वाला समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ है जिसमें दो स्वेच्छ अचर हैं।

(ii) सत्य; क्योंकि यह अपने अवकलजों में बहुपद समीकरण नहीं है।

(iii) सत्य;

(iv) सत्य; क्योंकि $f(\lambda x, \lambda y)=\lambda^{\circ} f(x, y)$

(v) सत्य; क्योंकि $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^1 f(x, y)$

(vi) असत्य; क्योंकि I.F = $e^{-1dx} = e^{-x}$

(vii) सत्य; क्योंकि दिए गए समीकरण को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$\frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{-2y}{1+y^2}dy$$

$\Rightarrow \quad \log(1 + x^2) = -\log(1 + y^2) + \log k$

$\Rightarrow \quad (1 + x^2)(1 + y^2) = k$

(viii) असत्य; क्योंकि I.F. = $e^{\sec x dx} = e^{\log(\sec x + \tan x)}$ = sec$x$ + tan$x$, इसलिए हल है

$y$ (sec$x$ + tan$x$) = $(\sec x + \tan x)\tan x dx = \int(\sec x \tan x + \sec^2 x - 1)dx$

= sec$x$ + tan$x$ – $x$ + $k$

(ix) सत्य; $x + y = \tan^{-1}y \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{1+y^2} - 1\right) = 1$, अर्थात्, $\frac{dy}{dx} = \frac{-(1+y^2)}{y^2}$ जो दिए गए समीकरण

(x) असत्य, क्योंकि $y = x$, दिए गए समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

## 9.3 प्रश्नावली

### लघु उत्तरीय प्रश्न Short Answer (SA)

**1.** $\frac{dy}{dx} = 2^{y-x}$ का हल ज्ञात कीजिए

**2.** एक तल में सभी रेखाएँ जो ऊर्ध्वाधर नहीं हैं के लिए अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

**3.** दिया है कि $\frac{dy}{dx} = e^{-2y}$ और जब $x = 5$ तब $y = 0$ है। जब $y = 3$ है तब $x$ का मान ज्ञात कीजिए।

**4.** अवकल समीकरण $(x^2 - 1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ को हल कीजिए।

**5.** अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = y$ को हल कीजिए।

**6.** $\dfrac{dy}{dx} + ay = e^{mx}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

**7.** अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} + 1 = e^{x+y}$ को हल कीजिए।

**8.** $ydx - xdy = x^2ydx$ को हल कीजिए।

**9.** अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2$, को हल कीजिए जब $y = 0, x = 0$

**10.** $(x + 2y^3)\dfrac{dy}{dx} = y$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

**11.** यदि $y(x)$ समीकरण $\dfrac{2 + \sin x}{1 + y}\dfrac{dy}{dx} = -\cos x$ का हल है और $y(0) = 1$, है तब $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

**12.** यदि $(1 + t)\dfrac{dy}{dt} - ty = 1$ का $y(t)$ एक हल है और $y(0) = -1$ है तो दिखाइए कि $y(1) = -\dfrac{1}{2}$

**13.** वह अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका व्यापक हल $y = (\sin^{-1}x)^2 + A\cos^{-1}x + B$ है जहाँ A और B स्वेच्छ अचर हैं।

**14.** उन सभी वृत्तों के समीकरण का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदु से होकर जाते हैं तथा केंद्र $y$-अक्ष पर स्थित है।

**15.** उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदु से होकर जाता है और अवकल समीकरण

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^2$$ को संतुष्ट करता है।

**16.** $x^2\dfrac{dy}{dx} = x^2 + xy + y^2$ को हल कीजिए।

**17.** अवकल समीकरण $(1 + y^2) + (x - e^{\tan^{-1}y})\dfrac{dy}{dx} = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

**18.** $y^2dx + (x^2 - xy + y^2)\, dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

**19.** $(x + y)\,(dx - dy) = dx + dy$ को हल कीजिए। [**संकेत :** $dx$ और $dy$ को पृथक करने के पश्चात $x + y = z$ रखिए ]

**20.** $2\,(y + 3) - xy\,\dfrac{dy}{dx} = 0$ को हल कीजिए जबकि $y\,(1) = -2$ दिया है।

**21.** अवकल समीकरण $dy = \cos x\,(2 - y\,\mathrm{cosec}x)\,dx$ को हल कीजिए, दिया है कि $x = \dfrac{\pi}{2}$ तब $y = 2$ है।

**22.** $Ax^2 + By^2 = 1$ से A और B को विलुप्त करके अवकल समीकरण बनाइए।

**23.** अवकल समीकरण $(1 + y^2)\tan^{-1}x\,dx + 2y\,(1 + x^2)\,dy = 0$ को हल कीजिए।

**24.** केंद्र (1, 2) वाले सभी सकेंद्री वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

## दीर्घ उत्तरीय प्रश्न Long Answer (L.A.)

**25.** $y + \dfrac{d}{dx}(xy) = x\,(\sin x + \log x)$ को हल कीजिए।

**26.** $(1 + \tan y)\,(dx - dy) + 2xdy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

**27.** $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y) + \sin\,(x + y)$ को हल कीजिए [**संकेत :** $x + y = z$ रखिए]

**28.** $\dfrac{dy}{dx} - 3y = \sin 2x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

**29.** बिंदु (2, 1) से जाने वाले उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका किसी भी बिंदु $(x, y)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$ है।

**30.** बिंदु (1, 0) से जाने वाले उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी भी बिंदु $(x, y)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\dfrac{y - 1}{x^2 + x}$ है।

**31.** मूल बिंदु से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिंदु $(x, y)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता इस बिंदु के $x$ निर्देशांक (भुज) तथा $y$ निर्देशांक (कोटि) के अंतर के वर्ग के बराबर है।

**32.** बिंदु (1, 1) से गुजरने वाले उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिंदु P $(x, y)$ से खींची गई स्पर्श रेखा, निर्देशांक अक्षों से A और B पर इस प्रकार मिलती है कि AB का मध्य बिंदु P है।

**33.** $x\frac{dy}{dx} = y\,(\log y - \log x + 1)$ को हल कीजिए।

## वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective type)

*प्रश्न 34 से 75 तक (M.C.Q) प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–*

**34.** अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)$ की घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) परिभाषित नहीं है

**35.** अवकल समीकरण $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{d^2y}{dx^2}$ की घात है

(A) 4 (B) $\frac{3}{2}$ (C) परिभाषित नहीं (D) 2

**36.** अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{5}} = 0$, के कोटि और घात क्रमशः हैं

(A) 2 और परिभाषित नहीं (B) 2 और 2 (C) 2 और 3 (D) 3 और 3

**37.** यदि $y = e^{-x}(\text{A}\cos x + \text{B}\sin x)$, तब $y$ एक हल है

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0$

**38.** $y = \text{A}\cos\alpha x + \text{B}\sin\alpha x$, जहाँ A और B स्वेछ अचर हैं के लिए अवकल समीकरण है

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} - \alpha^2 y = 0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha y = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} - \alpha y = 0$

**39.** अवकल समीकरण $xdy - ydx = 0$ का हल निरूपित करता है एक

(A) समकोणीय अतिपरवलय (rectangular hyperbola)

(B) परवलय जिसका शीर्ष मूल बिंदु पर है

(C) मूल बिंदु से होकर जाने वाली सरल रेखा

(D) वृत्त जिसका केंद्र मूल बिंदु पर है

**40.** अवकल समीकरण $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y\sin x = 1$ का समाकलन गुणक है।

(A) $\cos x$ (B) $\tan x$ (C) $\sec x$ (D) $\sin x$

**41.** अवकल समीकरण $\tan y \sec^2 x\, dx + \tan x \sec^2 y\, dy = 0$ का हल है।

(A) $\tan x + \tan y = k$ (B) $\tan x - \tan y = k$

(C) $\dfrac{\tan x}{\tan y} = k$ (D) $\tan x . \tan y = k$

**42.** $y = Ax + A^3$ द्वारा निरूपित वक्रों के कुल के अवकल समीकरण की घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

**43.** $\dfrac{xdy}{dx} - y = x^4 - 3x$ का समाकलन गुणक है :

(A) $x$ (B) $\log x$ (C) $\dfrac{1}{x}$ (D) $-x$

**44.** $\dfrac{dy}{dx} - y = 1$ का हल जब, $y(0) = 1$ है

(A) $xy = -e^x$ (B) $xy = -e^{-x}$ (C) $xy = -1$ (D) $y = 2e^x - 1$

**45.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y+1}{x-1}$, जब $y(1) = 2$ है के हलों की संख्या है।

(A) कोई नहीं (B) एक (C) दो (D) अनंत

**46.** निम्न से कौन सा अवकल समीकरण कोटि 2 का है?

(A) $(y')^2 + x = y^2$ (B) $y'y'' + y = \sin x$

(C) $y''' + (y'')^2 + y = 0$ (D) $y' = y^2$

**47.** अवकल समीकरण $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}-xy=1$ का समाकलन गुणक है

(A) $-x$ (B) $\dfrac{x}{1+x^2}$ (C) $\sqrt{1-x^2}$ (D) $\dfrac{1}{2}\log(1-x^2)$

**48.** $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=c$ किस अवकल समीकरण का व्यापक हल है?

(A) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ (B) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+x^2}{1+y^2}$

(C) $(1+x^2)\,dy+(1+y^2)\,dx=0$ (D) $(1+x^2)\,dx+(1+y^2)\,dy=0$

**49.** अवकल समीकरण $y\dfrac{dy}{dx}+x=c$ निरूपित करता है

(A) अतिपरवलय के कुल को (B) परवलय के कुल को

(C) दीर्घ वृत्तों के कुल को (D) वृत्तों के कुल को

**50.** $e^x\cos y\,dx-e^x\sin y\,dy=0$ का व्यापक हल है

(A) $e^x\cos y=k$ (B) $e^x\sin y=k$

(C) $e^x=k\cos y$ (D) $e^x=k\sin y$

**51.** अवकल समीकरण $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3+6y^5=0$ की घात है

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

**52.** $\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$ जब $y(0)=0$ का हल है

(A) $y=e^x(x-1)$ (B) $y=xe^{-x}$

(C) $y=xe^{-x}+1$ (D) $y=(x+1)e^{-x}$

**53.** अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx}+y\tan x-\sec x=0$ का समाकलन गुणक है

(A) $\cos x$ (B) $\sec x$ (C) $e^{\cos x}$ (D) $e^{\sec x}$

**54.** अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ का हल है

(A) $y=\tan^{-1}x$ (B) $y-x=k(1+xy)$

(C) $x=\tan^{-1}y$ (D) $\tan(xy)=k$

**55.** अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+y=\frac{1+y}{x}$ का समाकलन गुणक है

(A) $\frac{x}{e^x}$ (B) $\frac{e^x}{x}$ (C) $xe^x$ (D) $e^x$

**56.** $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ निम्न में से किस अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है

(A) $\frac{dy}{dx}+my=0$ (B) $\frac{dy}{dx}-my=0$ (C) $\frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2}+m^2y=0$

**57.** अवकल समीकरण $\cos x \sin y\, dx + \sin x \cos y\, dy = 0$ का हल है

(A) $\frac{\sin x}{\sin y}=c$ (B) $\sin x \sin y = c$

(C) $\sin x + \sin y = c$ (D) $\cos x \cos y = c$

**58.** $x\frac{dy}{dx} + y = e^x$ का हल है

(A) $y = \frac{e^x}{x}+\frac{k}{x}$ (B) $y = xe^x + cx$ (C) $y = xe^x + k$ (D) $x = \frac{e^y}{y}+\frac{k}{y}$

**59.** वक्र कुल $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, जहाँ $a$ एक स्वेच्छ अचर है का अवकल समीकरण है

(A) $(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$ (B) $2(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = xy$

(C) $2(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = xy$ (D) $(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$

**60.** वक्र कुल $y = Ax + A^3$ उस अवकल समीकरण के तदनुरूपी (संगत) है जिसकी कोटि है

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) परिभाषित नहीं है

**61.** $\frac{dy}{dx} = 2x\, e^{x^2-y}$ का व्यापक हल है

(A) $e^{x^2-y} = c$ (B) $e^{-y} + e^{x^2} = c$ (C) $e^y = e^{x^2} + c$ (D) $e^{x^2+y} = c$

**62.** वह वक्र जिसके लिए किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु के $x$-अक्ष (भुज) तथा $y$-अक्ष (कोटि) के अनुपात के बराबर है वह है

(A) दीर्घ वृत्त (B) परवलय (C) वृत्त (D) समकोणीय अतिपरवलय

**63.** अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=e^{\frac{x^2}{2}}+xy$ का व्यापक हल है

(A) $y=ce^{\frac{-x^2}{2}}$ (B) $y=ce^{\frac{x^2}{2}}$ (C) $y=(x+c)e^{\frac{x^2}{2}}$ (D) $y=(c-x)e^{\frac{x^2}{2}}$

**64.** समीकरण $(2y-1)\,dx-(2x+3)dy=0$ का हल है

(A) $\frac{2x-1}{2y+3}=k$ (B) $\frac{2y+1}{2x-3}=k$ (C) $\frac{2x+3}{2y-1}=k$ (D) $\frac{2x-1}{2y-1}=k$

**65.** अवकल समीकरण जिसका एक हल $y=a\cos x+b\sin x$ है

(A) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$

(C) $\frac{d^2y}{dx^2}+(a+b)\,y=0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2}+(a-b)\,y=0$

**66.** $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x},\ y\,(0)=0$ का हल है

(A) $y=e^{-x}(x-1)$ (B) $y=xe^{x}$ (C) $y=xe^{-x}+1$ (D) $y=xe^{-x}$

**67.** अवकल समीकरण ${\frac{d^3y}{dx^3}}^{2}-3\frac{d^2y}{dx^2}+2{\frac{dy}{dx}}^{4}=y^4$ की कोटि तथा घात क्रमश: है

(A) 1, 4 (B) 3, 4 (C) 2, 1 (D) 3, 2

**68.** अवकल समीकरण $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=\frac{d^2y}{dx^2}$ की कोटि तथा घात क्रमश: है

(A) 2, $\frac{3}{2}$ (B) 2, 3 (C) 2, 1 (D) 3, 4

**69.** वक्र कुल $y^2=4a\,(x+a)$ का अवकल समीकरण है

(A) $y^2=4\frac{dy}{dx}\left(x+\frac{dy}{dx}\right)$ (B) $2y\frac{dy}{dx}=4a$

(C) $y\frac{d^2y}{dx^2}+{\frac{dy}{dx}}^{2}=0$ (D) $2x\frac{dy}{dx}+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y$

**70.** $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ का निम्न में से कौन सा व्यापक हल है

(A) $y = (Ax + B)e^x$ (B) $y = (Ax + B)e^{-x}$

(C) $y = Ae^x + Be^{-x}$ (D) $y = A\cos x + B\sin x$

**71.** $\frac{dy}{dx} + y\tan x = \sec x$ व्यापक हल है

(A) $y \sec x = \tan x + c$ (B) $y \tan x = \sec x + c$

(C) $\tan x = y \tan x + c$ (D) $x \sec x = \tan y + c$

**72.** अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x$ का हल है

(A) $x (y + \cos x) = \sin x + c$ (B) $x (y - \cos x) = \sin x + c$

(C) $xy \cos x = \sin x + c$ (D) $x (y + \cos x) = \cos x + c$

**73.** अवकल समीकरण $(e^x + 1)\, y dy = (y + 1)\, e^x dx$ का व्यापाक हल है

(A) $(y + 1) = k (e^x + 1)$ (B) $y + 1 = e^x + 1 + k$

(C) $y = \log \{k (y + 1) (e^x + 1)\}$ (D) $y = \log \frac{e^x + 1}{y + 1} + k$

**74.** अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ का हल है

(A) $y = e^{x-y} - x^2 e^{-y} + c$ (B) $e^y - e^x = \frac{x^3}{3} + c$

(C) $e^x + e^y = \frac{x^3}{3} + c$ (D) $e^x - e^y = \frac{x^3}{3} + c$

**75.** अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ का हल है

(A) $y (1 + x^2) = c + \tan^{-1}x$ (B) $\frac{y}{1+x^2} = c + \tan^{-1}x$

(C) $y \log (1 + x^2) = c + \tan^{-1}x$ (D) $y (1 + x^2) = c + \sin^{-1}x$

**76.** नीचे दिए गए प्रश्नों (i से xi तक) में रिक्त स्थान भरिए–

(i) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + e^{\frac{dy}{dx}} = 0$ की घात ................ है।

(ii) अवकल समीकरण $\sqrt{1+\frac{dy}{dx}^{2}} = x$ की घात ................ है।

(iii) कोटि तीन के अवकल समीकरण के व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या ................ है।

(iv) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x\log x}=\frac{1}{x}$ इस ................ प्रकार का समीकरण है।

(v) $\frac{dx}{dy}+P_1 y = Q_1$ प्रकार के अवकल समीकरण का व्यापक हल ................ है।

(vi) अवकल समीकरण $\frac{xdy}{dx}+2y=x^2$ का हल ................ है।

(vii) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy-4x^2=0$ का हल ................ है।

(viii) अवकल समीकरण $ydx+(x+xy)dy=0$ का हल ................ है।

(ix) $\frac{dy}{dx}+y=\sin x$ का व्यापक हल ................ है।

(x) अवकल समीकरण $\cot y\, dx = xdy$ का हल ................ है।

(xi) $\frac{dy}{dx}+y=\frac{1+y}{x}$ का समाकलन गुणक ................ है।

**77.** बताइए कि दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य हैं?

(i) अवकल समीकरण $\frac{dx}{dy}+p_1 x = Q_1$ के समाकलन गुणक को $e^{\int p_1 dy}$ से लिखा जाता है।

(ii) $\frac{dx}{dy}+p_1 x = Q_1$ प्रकार के अवकल समीकरण के हल को

$x\,(\text{I.F.}) = \ (\text{I.F})\times Q_1 dy$ द्वारा दिया जाता है।

(iii) $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, जहाँ $f(x,y)$ एक शून्य घात वाला समघातीय फलन है, को हल करने के लिए सही प्रतिस्थापन $y=vx$ है।

(iv) $\frac{dx}{dy} = g(x, y)$ जहाँ $g(x, y)$ एक शून्य घात वाला समघातीय फलन है, प्रकार के अवकल समीकरण को हल करने के लिए सही प्रतिस्थापन $x = vy$ है।

(v) द्वितीय कोटि के अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या दो होती है।

(vi) वृत्तों के कुल $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण की कोटि दो होगी।

(vii) $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ का हल $y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = c$ है।

(viii) वक्रों के कुल $y = e^x$ (A$\cos x$ + B$\sin x$) को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ है।

(ix) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x}$ का हल $x + y = kx^2$ है।

(x) $x\frac{dy}{dx} = y + x\tan\frac{y}{x}$ का हल $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx$ है।

(xi) एक तल में सभी अक्षैतिज (रेखाएँ जो क्षैतिज नहीं हैं) सरल रेखाओं का अवकल समीकरण $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ है।